整係数群環について (有限群の群環と表現論)

大林, 忠夫

数理解析研究所講究録
111巻 1971年 65-81

整係数群環について

阪市大 理　　大林忠夫

§1. 序

有限群 G の有理整数環 $\mathbb{Z}$ 上の群環を $\mathbb{Z}G$ であらわす。群環に関するもっとも素朴な次の問題を考えよう。

問題：　二つの有限群 G, G' に対して，

$$\mathbb{Z}G \cong \mathbb{Z}G' \text{（環同型）} \Rightarrow G \cong G' \ ?$$

いくつかの特殊な場合に，肯定的であることが知られているが，完全な解答にはほど遠い。しかし，否定的な解答は，一つも与えられていない。

群環の同型 $\mathbb{Z}G \cong \mathbb{Z}G'$ は，任意の体 K における群環の同型 $KG \cong KG'$，また，ホモロジー，コホモロジー群の同型 $H_n(G,\mathbb{Z}) \cong H_n(G',\mathbb{Z})$，$H^n(G,\mathbb{Z}) \cong H^n(G',\mathbb{Z})$ をひきおこす。したがって，問題の研究に，表現論，ホモロジー理論が利用できる。問題の完全な解答を得ることも興味あるこ

とであるが，また，この問題の研究を通して，有限群の表現論やホモロジー理論などの，構造論への応用を深めてゆくことも重要であろうと思われる。

以下では，表現論，ホモロジー理論の応用という観点から，問題に関する二，三の結果について述べよう。

§2. 群環の単数

有限群 G の群環 $\mathbb{Z}G$ において，G の各元は，有限位数の単数という性質をもつ。したがって，$\mathbb{Z}G$ の単数の研究は，問題の解答への，一つの方法となる。

定理 1（*Higman* [3]，*Cohn – Livingstone* [2]）.
群環 $\mathbb{Z}G$ の有限位数の中心的な単数は，$\pm g$（g：G の中心的な元）の形のものに限る。

証明は [2] を参照．（G の既約指標の直交関係を使って，容易になされる．）

この定理から，ただちに，次を得る．

系 1. 群環の同型 ϕ; $\mathbb{Z}G \simeq \mathbb{Z}G'$ に対し，

i) $\mathfrak{z}(G)$ を G の中心とするとき，$\phi|_{\mathfrak{z}(G)}$; $\mathfrak{z}(G) \simeq \mathfrak{z}(G')$,

ii) とくに，G がアーベル群なら，$\phi|_G$; $G \simeq G'$.

注：同題を考える場合は，環同型 $\phi; \mathbf{Z}G \simeq \mathbf{Z}G'$ は，群環 $\mathbf{Z}G$, $\mathbf{Z}G'$ の augmentation map $\varepsilon; \mathbf{Z}G \to \mathbf{Z}$ $(\varepsilon(\sum_g x_g g) = \sum_g x_g)$, $\varepsilon'; \mathbf{Z}G' \to \mathbf{Z}$ と可換 $(\varepsilon = \varepsilon' \circ \phi)$ であると仮定できる．上の系における同型 ϕ も，そのように仮定されている．

非アーベル群においては，有限位数の単数でも，$\pm g$ の形でないものが，実際に存在し，同題の研究が複雑になる．次の補題は，そのような単数の形も，ある程度，制限されることを示していて重要である．

補題2.（[2]） $\mathbf{Z}G \ni u = \sum x_g g$ を有限位数の単数で，$\mathfrak{z}(G) \ni g_0$ なるある g_0 に対して，$x_{g_0} \neq 0$ ならば，$u = \pm g_0$，すなわち，$x_{g_0} = \pm 1$，$\forall g \neq g_0$ に対して，$x_g = 0$ である．

証明．G の正則表現による，u のトレースを調べることによって得られる（[2]，参照）．

この補題を使って，次の定理が得られる．

定理3.（[2]） $\varepsilon : \mathbf{Z}G \to \mathbf{Z}$ を augmentation map，H を，$\varepsilon(u) = 1$ なる $\mathbf{Z}G$ の単数 u からなるある有限群とすると，一般に，$(H:1) \leqq (G:1)$ で，とくに，$(H:1) = (G:1) \Leftrightarrow \mathbf{Z}H = \mathbf{Z}G$．

証明は [2] 参照．

$\phi;\ \mathbb{Z}G \simeq \mathbb{Z}G'$ を環同型，N を G の正規部分群とするとき，群準同型 $G \to G/N$ から得られる群環の準同型 $\rho_N;\ \mathbb{Z}G \to \mathbb{Z}(G/N)$ に対して，

$$\Phi(N) = \{\, g' \in G' \mid \rho_N \circ \phi^{-1}(g') = 1 \,\}$$

によって，G' の正規部分群 $\Phi(N)$ が定義される．次の定理は，非アーベル群の場合の問題の研究においては，基本的である．

定理4（[2]，Passman [8]．）$\phi;\ \mathbb{Z}G \simeq \mathbb{Z}G'$ のとき，

i) Φ は，G, G' の，おのおの，正規部分群のつくる lattice の間の同型対応をなす，

ii) とくに，$N \subseteq \mathfrak{z}(G) \Rightarrow \Phi(N) = \phi(N) \subseteq \mathfrak{z}(G')$，したがって，

$\phi|_N;\ N \simeq \Phi(N)$，

iii) ϕ は，環同型 $\bar{\phi};\ \mathbb{Z}(G/N) \simeq \mathbb{Z}(G'/\Phi(N))$ をひきおこし，次の図式を可換にする．

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{Z}G & \xrightarrow{\ \rho_N\ } & \mathbb{Z}(G/N) \\
\cong \Big\downarrow \phi & & \cong \Big\downarrow \bar{\phi} \\
\mathbb{Z}G' & \xrightarrow{\ \rho_{\Phi(N)}\ } & \mathbb{Z}(G'/\Phi(N))
\end{array}$$

証明．i) は定義から直接得られる．ii) は定理1の系か

ら，iii) は重の定義と定理3から示される．詳わしくは，[2] [8] 参照．

この定理，とくに，ii) によって，中心の性質によって，特徴づけられる群の場合を扱うことができる．

定理5（[2]，[8]．） $\mathbb{Z}G \cong \mathbb{Z}G'$ のとき，G, G' の昇（降）中心列の長さは等しく，おのおのの商群は同型である．とくに，G が級 n の巾零群なら，G' もそうである．

注：$C_1, \cdots, C_t$ を G の共役類，$c_i = \sum_{g \in C_i} g \in \mathbb{Z}G$ を共役和とすると，$\{c_1, \cdots, c_t\}$ は $\mathbb{Z}G$ の中心の $\mathbb{Z}$-基底をなす．Passman [8] は，$\{c_i\}$ が $\mathbb{Z}G$ の環論的性質によって決まるという Glauberman の結果に基づいて，具体的に $\{c_i\}$ を計算することによって，G が，級2の巾零群，または，位数 p^5 以下の p-群なら，問題は肯定的であることを示している．これらに関しては，[8]，または，大林 [6] 参照．

§3. 拡大群の群環

Π を有限群，A を Π-加群とする．Π の群環 $\mathbb{Z}\Pi$ は，augmentation $\varepsilon : \mathbb{Z}\Pi \to \mathbb{Z}$ によって，係数添離環となるが，Π-加群 A は，Π の作用を線型的に $\mathbb{Z}\Pi$ へ拡張した作用と，

εを通して得られる$Z\Pi$の作用により，$Z\Pi$-両側加群とも見なせる。そして，群ΠのAに関する2-コサイクル
$\alpha: \Pi\times\Pi\longrightarrow A$と，係数並離環$Z\Pi$の$A$に関する2-コサイクル$\alpha^*: Z\Pi\times Z\Pi\longrightarrow A$は，対応$\alpha\longrightarrow\alpha^*$（$\alpha^*(\sum x_\sigma\sigma, \sum x'_\tau\tau) = \sum x_\sigma x'_\tau\alpha(\sigma,\tau)$），$\alpha^*\longrightarrow\alpha$（$\alpha(\sigma,\tau)=\alpha^*(\sigma,\tau)$）によって同一視される。この同一視によって，$H^2(\Pi,A)=H^2(Z\Pi,A)$と考える。したがって，$A$を核とする$\Pi$の群拡大

$$E_G:\quad 0\longrightarrow A\xrightarrow{i} G\xrightarrow{f}\Pi\longrightarrow 1 \tag{1}$$

の同値類の集合$Ext(\Pi,A)$と，Aを核とする係数並離環$Z\Pi$の環拡大

$$E_\Lambda:\quad 0\longrightarrow A\xrightarrow{i^*}\Lambda\xrightarrow{f^*} Z\Pi\longrightarrow 0 \tag{2}$$

の同値類の集合$Ext(Z\Pi,A)$とが一対一に対応する。E_GからE_Λ，また，その逆の具体的な構成の仕方は，たとえば，Cartan-Eilenberg [1] で与えられている。必要上，ここで復習しておく。

$E_G\Rightarrow E_\Lambda$の構成：群拡大(1)が与えられたとき，Aと$i(A)$を同一視して，AをGの部分群とみなすと，環の完全系列　$0\to I(A)ZG\xrightarrow{i} ZG\xrightarrow{f} Z\Pi\longrightarrow 0$　（ここで，$I(A)=$ kernel$\{\varepsilon: ZA\to Z$ augmentation map$\}$, augmentation イデアル

である）が得られる．ZG の両側イデアル $I(A)I(G)=I(A)ZG\cdot I(G)$ は $I(A)ZG$ に含まれるから，次の完全系列が得られる．

$$0 \longrightarrow I(A)ZG/I(A)I(G) \xrightarrow{i^*} ZG/I(A)I(G) \xrightarrow{f^*} Z\Pi \longrightarrow 0 \qquad (3)$$

ここで，写像 $a \bmod [A,A] \longrightarrow (a-1) \bmod I(A)I(G)$ は，乗法群から加法群への同型 $A/[A,A] \cong I(A)ZG/I(A)I(G)$ を与える．したがって，$I(A)ZG/I(A)I(G)$ は，加法群 A（A: アーベル群より $[A,A]=1$）と同一視され，そのとき，i^* は，$i^*(a)=(i(a)-1) \bmod I(A)I(G)$ となる．そこで $\Lambda = ZG/I(A)I(G)$ とおけば，上の完全系列 (3) が，係数遊離環の拡大になることが，容易に分る．

$E_\Lambda \Rightarrow E_G$ の構成：係数遊離環の拡大 (2) が与えられたとき，$G=\{\lambda\in\Lambda : f^*(\lambda)\in\Pi\}$ とおくと，G は Λ の乗法に関し，群となり，$f=f^*|G ; G\longrightarrow\Pi$，$i: A\to G$（$i(a)=i^*(a)+1$）が，群拡大 E_G: $0\to A\xrightarrow{i} G\xrightarrow{f}\Pi\to 1$ を定義する．

補題6（[1].）上の方法によって，E_G から E_Λ，または，E_Λ から E_G を構成したとき，E_G と E_Λ の特性類は（$H^2(\Pi,A)$ と $H^2(Z\Pi,A)$ の同一視のもとで）一致する．よって，上の構成による対応 $E_G \leftrightarrow E_\Lambda$ によって，$\mathrm{Ext}(\Pi,A)$ と

$Ext(Z\Pi, A)$ は一対一に対応する。

拡大の理論を，われわれの問題に応用するため，さらに，次の補題を必要とする。　いま，二つの群拡大と同型写像

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, "\cong"', "\phi^*"] & G \arrow[r] \arrow[d, dotted, "\Phi"] & \Pi \arrow[r] \arrow[d, "\cong"', "\psi"] & 1 \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r] & G' \arrow[r] & \Pi' \arrow[r] & 1
\end{tikzcd} \qquad (\mathscr{A})$$

が与えられたとする。　このとき，Π'-加群 A' を ψ を通して Π-加群とみることによって，ψ は，コホモロジー群の同型 $H(\psi)$; $H^2(\Pi', A') \xrightarrow{\simeq} H^2(\Pi, A')$ をひきおこす。　さらに，ϕ^* が Π-加群としての同型写像なら，コホモロジー群の同型 $H(\phi^*)$; $H^2(\Pi, A) \xrightarrow{\simeq} H^2(\Pi, A')$ が得られる。

補題7（e.g. [5]）　次は同値である。

(i)　図式($\mathscr{A}$)を可換にする同型 $\Phi : G \simeq G'$ が存在する。

(ii)　ϕ^* は Π-加群（A' を ψ を通して，Π-加群と考えて）の同型写像であり，拡大 G, G' の特性類 $\alpha \in H^2(\Pi, A)$, $\alpha' \in H^2(\Pi', A')$ に対し，$H(\phi^*)(\alpha) = H(\psi)(\alpha')$ が成り立つ。

注意：係数遊離環の拡大に対しても，同様の命題が成り立つ。

問題を考えよう。 $\phi ; ZG \xrightarrow{\sim} ZG'$ を augmentation と可換な環同型とする。もしも、G がアーベル正規部分群 A をもてば、定理4によって、G' も A と同型なアーベル正規部分群 $A' = \Phi(A)$ をもつ。$\pi = G/A$, $\pi' = G'/A'$ とおくと、同じく定理4によって、次の可換図式を得る。

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & I(A)ZG & \longrightarrow & ZG & \longrightarrow & Z\pi & \longrightarrow & 0 \\
 & & \cong \downarrow \phi & & \cong \downarrow \phi & & \cong \downarrow \bar{\phi} & & \\
0 & \longrightarrow & I(A')ZG' & \longrightarrow & ZG' & \longrightarrow & Z\pi' & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

ところで、ϕ は augmentation と可換であるから、$\phi(I(A)I(G)) = I(A')I(G')$ となり、$I(A)ZG / I(A)I(G)$ と A を同一視して、次の可換図式を得る。

$$\begin{array}{rccccccccc}
E_\Lambda : & 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & ZG/I(A)I(G) & \longrightarrow & Z\pi & \longrightarrow & 0 \\
 & & & \cong \downarrow \phi^* & & \cong \downarrow \phi^* & & \cong \downarrow \bar{\phi} & & \\
E_{\Lambda'} : & 0 & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & ZG'/I(A')I(G') & \longrightarrow & Z\pi' & \longrightarrow & 0
\end{array} \qquad (5)$$

$E_\Lambda, E_{\Lambda'}$ は、補題6によって、群拡大 $E_G : 0 \to A \to G \to \pi \to 1$, $E_{G'} : 0 \to A' \to G' \to \pi' \to 1$ に対応する係数遊離環の拡大であり、$E_G, E_{G'}$ の特性類 α, α' は $E_\Lambda, E_{\Lambda'}$ の特性類とも考えられる。よって、補題7の後の注意によって、次が成り立つ。

補題8. $Z\Pi'$-加群 A' を環同型 Φ を通して，$Z\Pi$-加群とみるとき，$\phi^*; A\to A'$ は，$Z\Pi$-加群の同型写像であり，Φ, ϕ^* からひきおこされるコホモロジー群の同型，$H(\Phi)$; $H^2(Z\Pi', A')\to H^2(Z\Pi, A')$, $H(\phi^*)$; $H^2(Z\Pi, A)\to H^2(Z\Pi, A')$ と，E_G, $E_{G'}$ の特性類 α, α' に対し，$H(\phi^*)(\alpha)=H(\Phi)(\alpha')$ が成り立つ．

この補題から，アーベル正規部分群 A をもつ有限群 G に対し，環同型 $\phi: ZG\simeq ZG'$ が与えられたとき，$G\cong G'$ なるための，一つの十分条件を得る．

補題9. $\phi: ZG\simeq ZG'$ に対し，次の条件をみたす，群同型 $\psi: \Pi\simeq\Pi'$ が存在すれば，$G\cong G'$ である．

(1) 環同型 $\Phi: Z\Pi\simeq Z\Pi'$ を通して得られる Π の A' への作用と，ψ を通して得られる Π の A' への作用は一致する．

(2) 拡大 $E_{G'}$ の特性類 $\alpha'\in H^2(\Pi', A')$ に対し，

$H(\Phi)$: $H^2(\Pi', A')=H^2(Z\Pi', A')\to H^2(Z\Pi, A')=H^2(\Pi, A')$ と考えて，

$$H(\psi)(\alpha')=H(\Phi)(\alpha') \quad \text{が成り立つ.}$$

証明) ϕ から得られる同型 $\phi^*: A\simeq A'$ と，与えられた同型 $\psi: \Pi\simeq\Pi'$ に対して，図形 (4) を考える．補題8 より，ϕ^* は，A' を Φ を通して Π-加群と考えて，Π-同型であるか

ら，条件(1) によって，A'をψを通して，π-加群と考えても，$\phi^*: A \simeq A'$ は π-同型である。さらに，補題8と条件(2)より，拡大 E_G, $E_{G'}$ の特性類 α, α' に対して，$H(\phi^*)(\alpha) = H(\psi)(\alpha')$ が成り立つ．よって，補題7より，$G \cong G'$.

定理10 (Jackson [4].) $\phi; ZG \simeq ZG'$ で，Gがメタアーベル群ならば，$G \cong G'$ である．さらに，AをGのアーベル正規部分群で，G/A がアーベル群なるものとすると，A に対応するG'の正規アーベル部分群 $A' = \Phi(A)$ と，ϕからひきおこされる同型 $\phi^*: A \simeq A'$ が得られるが，ϕに対して，同型 $\Psi: G \simeq G'$ として，次を満すものが取れる．

$\phi(g) \equiv \Psi(g) \mod I(A')I(G')$, ${}^{\forall}g \in G$, かつ，$\Psi_{|A} = \phi^*$.

証明) $\pi = G/A$, $\pi' = G'/A'$ とおくと，ϕは同型 $\bar{\phi}; Z\pi \simeq Z\pi'$ をひきおこすが，πはアーベル群であるから，定理1の系 ii) によって，$\bar{\phi}_{|\pi}; \pi \simeq \pi'$ (群同型) となる。よって，補題9において，ψとして $\bar{\phi}_{|\pi}$ を考えれば，条件 1), 2) は明らかに満たされる．さらに，合同式を満たすような同型 $\Psi: G \simeq G'$ が取れることは，図形(5)と，補題7の証明 ([5] 参照) から容易に分る．

定理11. $ZG \cong ZG'$ で，Gがアーベル正規部分群Aをもち，

$G/A = \Pi$ が, 位数8の四元数群と初等的アーベル2-群の直積に同型なら, $G \cong G'$.

証明). Higman [3] によって, 上のような Π に対しては, $Z\Pi$ の任意の単数は, $\pm\sigma$ $(\sigma \in \Pi)$ の形のものに限ぎることが知られている. よって, 任意の環同型 $\bar{\Phi}: Z\Pi \simeq Z\Pi'$ は, 群同型 $\psi = \bar{\Phi}|_{\Pi} : Z\Pi \simeq Z\Pi'$ をひきおこす。いま, $A' = \Phi(A)$, $\Pi' = G'/A'$ とおき, $\phi: ZG \simeq ZG'$ から得られる, 同型 $\bar{\Phi}: Z\Pi \simeq Z\Pi'$ に対し, $\psi = \bar{\Phi}|_{\Pi}$ とおけば, 群同型 ψ は, 補題9の条件を満たす.

定理12. $\phi; ZG \simeq ZG'$ 環同型. A を G のアーベル正規部分群, A' を A に対応する G' のアーベル正規部分群とする.
H/A, H'/A' を, おのおの, G/A, G'/A' の中心とすると, $H \cong H'$.

証明). $\Pi = G/A$, $\Pi' = G'/A'$, $\Pi_0 = H/A$, $\Pi_0' = H'/A'$ とおく。ϕ は環同型 $\bar{\Phi}; Z\Pi \simeq Z\Pi'$ をひきおこすが, Π_0 は Π の中心だから, $\psi = \bar{\Phi}|_{\Pi_0}; \Pi_0 \simeq \Pi_0'$ は群同型となる. そこで, 群拡大の次の図形を考える.

$$
\begin{array}{llcccccccc}
E_H : & 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & H & \longrightarrow & \Pi_0 & \longrightarrow & 1 \\
 & & & \cong \big\downarrow \phi^* & & & & \cong \big\downarrow \psi & & \\
E_{H'} : & 0 & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & H' & \longrightarrow & \Pi_0' & \longrightarrow & 1 .
\end{array}
$$

まず, 補題8より, A' を ψ を通して Π_0-加群と考えたとき,

ϕ^* は Π_0-同型である($\psi=\bar{\Phi}|\Pi_0$ に注意). 次に,

$Res\,;\,H^2(\Pi,A)\longrightarrow H^2(\Pi_0,A)$ を制限写像とすると, 明らかに, $Res\circ H(\phi^*)=H(\phi^*)\circ Res$ が成り立つ. また, $\psi=\bar{\Phi}|\Pi_0$ に注意すれば, $Res\circ H(\bar{\Phi})=H(\psi)\circ Res$ が成り立つ. α,α' を, おのおの, 拡大 $E_G\,;\,0\to A\to G\to\Pi\to 1$, $E_{G'}:\,0\to A'\to G'\to\Pi'\to 1$ の特性類とすると, 補題8より, $H(\phi^*)(\alpha)=H(\bar{\Phi})(\alpha')$ である. これと, 上の関係式より, $H(\phi^*)(Res(\alpha))=H(\psi)(Res(\alpha'))$ を得る. ところで, $Res(\alpha)$, $Res(\alpha')$ は, おのおの, 拡大 E_H, $E_{H'}$ の特性類であるから, 補題7によって, $H\cong H'$ となる.

系([8].) $ZG\cong ZG'$ なら, G と G' の二番目の中心は, 互に同型である。とくに, G が 級2の巾零群なら, $G\cong G'$.

§4. 位数8の二面体群 D_4 の群環 ZD_4.

定理10, あるいは, 定理12の系から, 一般の可解群, 巾零群への拡張が次の問題となるが, いまのところ, 一つの難点がある. たとえば, $\phi:ZG\simeq ZG'$ で, G を級3の巾零群, A を G の中心とすると $\Pi=G/A$ は級2の巾零群となる。$\Phi(A)=A'$, $\Pi'=G'/A'$ とおくと, ϕ は同型 $\bar{\Phi}\,;\,Z\Pi\simeq Z\Pi'$ をひき起こす。いま, $G\cong G'$ なる一つの規準として, 補題9を考えれば, Π は級2の巾零群だから, 確しかに, 群同型 $\psi:\Pi\simeq\Pi'$ が存在

するが、この ψ が補題9の条件をみたすかどうかは分らない。前章で扱われた場合は、ある意味で、補題9の条件が、trivially に成り立っていた。しかし、一般にその事は期待できない。実際、補題9において、$\pi = D_4$ の場合には コホモロジー群を考えて、はじめて条件がみたされることが分る。このことを以下で示そう。そのために、$\mathbb{Z}D_4$ の環自己同型についての、ある知識が必要となる。

D_4 を、$a^4=b^2=1$, $ab=ba^3$ なる a, b で生成された、位数8の二面体群とする。$A=\langle a^2 \rangle$ は D_4 の中心となる。

補題13. 合同式

$$\varphi(x) \equiv x \mod I(A)I(D_4), \quad \forall x \in D_4 \tag{6}$$

をみたす $\mathbb{Z}D_4$ の環自己同型 $\varphi; \mathbb{Z}D_4 \cong \mathbb{Z}D_4$ (augmentation ε と可換) は、次の形で与えられる。

$$\left\{\begin{array}{l} \varphi(a) = a + r_a(1-a^2)a + r_b(1-a^2)b + r_{ab}(1-a^2)ab \\ \varphi(b) = b + s_a(1-a^2)a + s_b(1-a^2)b + s_{ab}(1-a^2)ab, \end{array}\right. \tag{7}$$

ここで、$r = \{r_a, r_b, r_{ab}\}$, $s = \{s_a, s_b, s_{ab}\}$ は、

$$\left\{\begin{array}{l} r_a(r_a+1) = r_b^2 + r_{ab}^2 \\ s_b(s_b+1) = s_a^2 - s_{ab}^2 \\ 2(r_a s_a - r_b s_b - r_{ab} s_{ab}) = r_b - s_a \end{array}\right. \tag{8}$$

をみたす偶数である. 逆に, (7) で定義される φ は, 合同式(6)をみたす ZD_4 の自己同型である.

証明). [7] を参照.

この補題の(7)式で定義される自己同型を, 簡単のため, $\varphi_{r,s}$ と記すことにする.

定理14. ZD_4 の (augmentation ε と可換な) 任意の自己同型 φ は, D_4 の自己同型 Φ と, (8) 式をみたすある偶数 $r=\{r_a, r_b, r_{ab}\}$, $s=\{s_a, s_b, s_{ab}\}$ に対し, $\varphi_{r,s}$ との合成 $\varphi_{s,r}\circ\Phi$ として得られる。

証明). D_4 の中心 A による商群 D_4/A はアーベル群より, 環同型 $\varphi ; ZD_4 \simeq ZD_4$ に, 定理10を適用すると, $\varphi(x)\equiv\Phi(x) \mod I(A)I(D_4)$, ${}^\forall x\in D_4$ なる D_4 の自己同型 Φ が存在する. かつ, $\Phi(A)=A$ より, ZD_4 の自己同型 $\varphi\circ\Phi^{-1}$ は, $\varphi\circ\Phi^{-1}(x)\equiv x \mod I(A)I(D_4)$, ${}^\forall x\in D_4$ をみたす。よって, 補題13より, 定理を得る.

定理15. $\phi ; ZG\simeq ZG'$ で, G が初等的アーベル群 A を正規部分群にもち, G/A が位数8の二面体群 D_4 に同型となるような 2-群ならば, $G\cong G'$ である.

証明). $A'=\Phi(A)$ を A に対応する G' のアーベル正規部分群とする. $\phi^*; A\simeq A'$ を ϕ から得られる同型, $\pi=G/A$, $\pi'=G'/A'$ とおいて, ϕ から得られる環同型 $\bar{\Phi}; Z\pi\simeq Z\pi'$ を考える. π は D_4 に同型であるから, π_0, π_0' を π, π' の中心とすると, $\bar{\Phi}(x)\equiv\Psi(x) \bmod I(\pi_0')I(\pi')$, $\forall x\in\pi$, かつ, $\Psi(\pi_0)=\pi_0'$ となる群同型 $\Psi; \pi\simeq\pi'$ が存在する. よって, $\Psi^{-1}\circ\bar{\Phi}$ は, $Z\pi$ の自己同型で, $\Psi^{-1}\circ\bar{\Phi}(x)\equiv x \bmod I(\pi_0)I(\pi)$, $\forall x\in\pi$ をみたす。よって, 補題13より, $\Psi^{-1}\circ\bar{\Phi}(x)=x+2X$, $X\in I(\pi_0)Z\pi$ なる X が, $x\in D_4$ に対して決まる. すなわち, $\bar{\Phi}(x)=\Psi(x)+2\Psi(X)$. ところで, A は巾指数2であるから, $\bar{\Phi}$ を通しての, π の A' への作用は, Ψ を通してのそれに一致する. また, $H^2(\pi, A')$ も巾指数2であるから, 明らかに, $H(\bar{\Phi})=H(\Psi)$ となる. よって, 補題9より, $G\cong G'$ を得る.

例. 補題13において, 合同式(6) をみたす ZD_4 の自己同型 φ としては, たとえば, 次のものがある.

$$\begin{cases} \varphi(a)=a+4(1-a^2)a+2(1-a^2)b+4(1-a^2)ab \\ \varphi(b)=b+2(1-a^2)a+2(1-a^2)ab \end{cases}$$

引用文献

[1] H. Cartan - S. Eilenberg ; Homological Algebra, Princeton Univ. Press, 1956.

[2] J.A. Cohn - D. Livingstone ; On the structure of group algebras, Canad. J. Math., 17 (1965), 583-593.

[3] G. Higman ; The units of group rings, Proc. Lond. Math. Soc., 46 (1940), 231-248.

[4] D. A. Jackson ; The groups of units of the integral group rings of finite metabelian and finite nilpotent groups, Quart. J. Math. Oxford, 20 (1969), 319-331.

[5] S. Lang ; Rapport sur la Cohomologie des Groupes, Benjamin, Inc., 1966.

[6] 大林 ; 整係数群環について, 数学, 19 (1967), 18-30.

[7] T. Obayashi ; Integral group rings of finite groups, Osaka J. Math., 7 (1970), 近刊.

[8] D.S. Passman ; Isomorphic groups and group rings, Pacific J. Math., 15 (1965), 561-583.